UNIVERSITE OUAGA I
Pr Joseph KI-ZERBO
Office du Baccalauréat

Séries F1-F2-F3-F4

Année 2017
Session Normale
Epreuve du 2ème tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Cette épreuve comporte deux (2) pages

Exercice 1 (4 points)

Une usine de construction de motocyclettes propose des motocyclettes de marque Yamato dont le prix évolue chaque année. Le tableau suivant donne le prix (en milliers de francs CFA) de la motocyclette neuve achetée entre 2008 et 2015.

Année	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Rang de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix de la moto	240	268	291	321	356	394	429	465

On désigne par x la variable égale au rang de l'année et par y la variable égale au prix de la motocyclette correspondant au rang de l'année considérée.

1) Représenter graphiquement le nuage de points associé à la serie statistique $(x; y)$ dans un repère orthogonal. (1 point)

- Sur l'axe des abscisses : placer 0 à l'origine puis prendre un cm pour une année.
- Sur l'axe des ordonnées : placer 240 à l'origine puis prendre un cm pour 20 unités.

(une unité correspond à 1000 FCFA)

2) a) Un ajustement affine du nuage de points vous paraît-il possible ? Justifier votre réponse. (0,5 point)

b) Déterminer les coordonnées des points moyens partiels G_1 et G_2 correspondant respectivement aux 4 premiers points et aux 4 derniers. (2 x 0,5 point)

c) Déterminer une équation de la droite (G_1G_2). (0,5 point)

3) On suppose par la suite que la tendance des prix se maintient encore pendant 5 ans à partir de 2015.

a) A l'aide du graphique, estimer le prix de la motocyclette en 2018. (0,5 point)

b) Vérifier le résultat obtenu par un calcul algébrique. (0,5 point)

Exercice 2 (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(3; -2; 1)$, $B(5; 2; -3)$, $C(6; -2; -2)$ et $D(4; 3; 2)$.

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés. (0,75 point)

b) Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle. On précisera le sommet de l'angle droit. (0,75 point).

c) Calculer l'aire du triangle ABC en unités d'aire. (0,5 point)

2) a) Montrer que le vecteur $\vec{n}(2; 1; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC). (0,5 point)

b) Montrer que la distance du point D au plan (ABC) est égale à 3. (0,75 point)

3) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$ en unités de volume. (0,75 point)

Problème (12 points)

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ où ln désigne le logarithme népérien. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A (2,75 points)

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^3 - x - 2\ln(x) + 1$ et P le polynôme défini par $P(x) = 3x^3 - x - 2$.

1) a) Calculer $P(1)$ puis factoriser P. (0,75 point)
   b) Etudier le signe de P sur $]0;+\infty[$. (0,5 point)
2) a) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$ et montrer que $g'(x) = \dfrac{P(x)}{x}$. (0,75 point)
   b) En déduire le signe $g'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$. (0,25 point)
   c) Etudier le sens de variation de g puis en déduire le signe de g sur $]0;+\infty[$. (0,5 point)

Partie B (8,25 points)

1) a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. (0,5 point)
   b) Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$. (0,75 point)
   c) En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation. (0,75 point)
   d) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1. (0,5 point)
2) Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = x + \ln x$
   a) Etudier le sens de variation de h sur $]0;+\infty[$. (0,75 point)
   b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ dans $]0;+\infty[$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $]0,4;0,7[$. (0,75 point)
   c) Montrer que $f(\alpha) = \alpha$. (0,25 point)
3) Soit $(\triangle)$ la droite d'équation $y = x$.
   a) Montrer que $(\triangle)$ est une asymptote à (C). (0,5 point)
   b) Déterminer les positions relatives de (C) et $(\triangle)$. (0,5 point)
4) Soient u et v les fontions définies sur $]0;+\infty[$ par $u(x) = -\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$.
   a) Montrer que u est une primitive de v. (0,5 point)
   b) En déduire l'ensemble F des primitives de f. (0,5 point)
5) a) Construire $(\triangle)$, (T) et (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (1,5 point)
   b) Calculer en cm² l'aire du domaine délimité par la droite $(\triangle)$, la courbe (C) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$. (0,5 point)

Partie C (1 point)

Les coordonnées d'un point mobile M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^t + e^{-t} + te^{-2t} \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

1) Montrer que la trajectoire (Γ) de M est une partie de (C) que l'on précisera. (0,5 point)
2) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse de M à l'instant $t = 0$. (0,5 point)

On donne : $\ln 2 \simeq 0,7$; $\ln 5 \simeq 1,6$; $\ln(0,7) \simeq -0,4$; $\ln(7) \simeq 1,9$

Fin