UNIVERSITE OUAGA I
Pr Joseph KI-ZERBO
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2017
Session Normale
Epreuve du 1er tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Cette épreuve comporte deux (2) pages

Exercice 1 (4 points)

1) a) Ecrire sous la forme algébrique le nombre complexe $(1+i\sqrt{3})^2$. (0,25 point)
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+2z+19-18i\sqrt{3}=0$. (0,5 point)

2) Résoudre dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ le système suivant :
$$\begin{cases} z_1+z_2=-2 \\ z_1^2-z_2^2=-4+\dfrac{4i\sqrt{3}}{3} \end{cases}. \text{ (0,5 point)}$$

3) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives a, b, c et d telles que $a=2+3i\sqrt{3}$; $b=\dfrac{1}{9}(\overline{a}-2)$; $c=-a-2$ et $d=a-b+c$ (où $\overline{a}$ est le conjugué de a).
   a) Déterminer les nombres complexes b, c et d puis placer les points A, B, C et D dans le plan complexe. (Unité graphique : 2 cm et $\sqrt{3}\simeq 1,7$). (1,25 point)
   b) Comparer $a+c$ et $b+d$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$. (0,5 point)
   c) Calculer et interpréter géométriquement un argument du nombre complexe $Z=\dfrac{c-a}{d-b}$. Préciser alors la nature exacte de $ABCD$. (1 point)

Exercice 2 (4 points)

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

1) Déterminer le nombre de tirages possibles. (0,5 point)
2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : «Les nombres portés par ces 3 boules sont tous des nombres premiers». (0,5 point)
   B : «Les nombres portés par ces 3 boules sont tous divisibles par 3». (0,5 point)
   C : «Deux boules portent un numéro divisible par 3». (0,5 point)
   D : «Les trois numéros sont des multiples de 2». (0,5 point)
   E : «Les trois nombres portés par ces boules, convenablement rangés forment trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 3». (0,75 point)
   F : «Les trois nombres portés par ces boules, convenablement rangés forment trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$». (0,75 point)

Problème (12 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x)=x\sqrt{3-x}+1 \text{ si } x\leqslant 3 \\ f(x)=e^{3-x}+x-3 \text{ si } x>3 \end{cases}$$
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (Unité graphique : 2 cm)

Partie A (10 points)

1) a) Etudier la continuité de f en 3. (0,75 point)

b) Etudier la dérivabilité de f en 3 et interpréter graphiquement le résultat obtenu. (1,75 point)

2) a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (0,5 point)

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)$. Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ? (0,5 point)

3) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 3$ est asymptote à (C) en $+\infty$. Préciser la position de (C) par rapport à (D) dans $]3, +\infty[$. (0,5 point)

b) Etudier la position de (C) par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ sur $[0; 2]$. (0,5 point)

4) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 3$ et étudier son signe. (1,25 point)

b) En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation. (1,5 point)

5) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α. Vérifier que $-1 < \alpha < 0$. (1,25 point)

b) Contruire la courbe (C), les droites (D) et (Δ) et les demi-tangentes au point d'abscisse 3 de (C). (1,5 point)

Partie B (2 points)

1) Calculer l'aire A en cm^2, de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. (On pourra utiliser une intégration par parties). (1 point)

2) On considère un point mobile M dont les coordonnées sont données en fonction du paramètre t par : $\begin{cases} x(t) = 3 - e^{2t} \\ y(t) = 3e^t - e^{3t} + 1 \end{cases}$, $t \geqslant 0$

Montrer que la trajectoire de M est une partie de (C) que l'on précisera. (1 point)

Fin