UNIVERSITE OUAGA I
Pr Joseph KI-ZERBO
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2019
Session Normale
Epreuve du 1er tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Cette épreuve comporte deux (2) pages.

Exercice 1 (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ unité graphique 1 cm.

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ pour tout z par : $P(z) = z^3 - 3z^2 + (3i+3)z - 6 + 2i$.

1) Calculer $P(-i)$; puis en déduire une factorisation de $P(z)$. (1 point)

2) a) Resoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$. (0,5 point)

b) Soient les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -i$; $z_B = 2i$ et $z_C = 3 - i$. Placer les points A, B et C dans le repère. (0,5 point)

c) Calculer $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$; puis interpréter géométriquement le module et un argument de ce quotient. En déduire la nature du triangle ABC. (1 point)

3) Soit D l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

a) Calculer l'affixe du point D. (0,5 point)

b) Donner la nature exacte du quadrilatère $ABDC$. (0,5 point)

Exercice 2 (4 points)

Une urne contient cinq boules portant le numéro 2 ; quatre boules portant le numéro 3 et trois boules portant le numéro 4.

On tire simultanément trois boules de l'urne. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1) Déterminer les probabilités des évènements suivants :

A : «Tirer au moins une boule portant le numéro 3». (0,25 point)

B : «Tirer trois boules portant des numéros tous différents». (0,25 point)

C : «Tirer trois boules portant le même numéro». (0,25 point)

D : «Tirer trois boules dont exactement deux portent le même numéro». (0,25 point)

2) Soit X la variable aléatoire égale à la somme des numéros marqués sur les trois boules tirées.

a) Quelles sont les valeurs prises par X. (0,5 point)

b) Déterminer la loi de probabilité de X. (1 point)

c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X. (0,5 point)

3) On appelle succès l'évènement E : «$(X \geqslant 10)$».

a) Calculer la probabilité de E. (0,5 point)

b) On repète trois fois l'expérience de manière indépendante. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux succès. (0,5 point)

On donne : $\dfrac{23}{110} \simeq 0,2$; $\dfrac{87}{110} \simeq 0,7$

Problème (12 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2 - x + \ln(2x-3) \text{ si } x \geqslant 2 \\ f(x) = -x + 1 + e^{x-2} \text{ si } x < 2. \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique 4 cm. On notera f' la dérivée de f.

Partie A (6,5 points)

1) Etudier la continuité de f en 2.

2) a) Vérifier que $\dfrac{f(x)}{x-2} = -1 + 2\dfrac{\ln[2(x-2)+1]}{2(x-2)}$ pour tout $x > 2$. (0,5 point)

b) Etudier la dérivabilité de f en 2. Interpréter géométriquement le résultat obtenu. (0,5 point)

3) a) Calculer la limite de f en $-\infty$. (0,5 point)

b) Vérifier que pour tout $x \geqslant 2$. On a : $f(x) = 2 - x\left(1 - \dfrac{2x-3}{x}.\dfrac{\ln(2x-3)}{2x-3}\right)$. (0,5 point)

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. (0,5 point)

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)+x]$. (0,5 point)

Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

4) Montrer que (C) admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $-\infty$. (0,5 point)

5) a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ puis étudier son signe. (1 point)

b) En déduire le sens de variation de f. (0,5 point)

c) Dresser le tableau de variation de f. (0,5 point)

6) Tracer $(C), (\Delta)$, la tangente et les demi-tangentes éventuelles. (1 point)

Partie B (3 points)

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dont l'une est dans l'intervalle $I = [3; 4]$. (On notera α celle qui est dans I). (0,5 point)

2) On considère la fonction g définie sur $[2; +\infty[$ par $g(x) = 2 + \ln(2x-3)$

a) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$. (0,5 point)

b) Montrer que : (i) $g(x) \in I$; pour tout $x \in I$. (0,5 point)

(ii) $|g'(x)| \leqslant \dfrac{2}{3}$ pour tout $x \in I$. (0,5 point)

c) En déduire que : $|g(x) - \alpha| \leqslant \dfrac{2}{3}|x-\alpha|$ pour tout $x \in I$. (1 point)

Partie C (2,5 points)

Soit (U_n) la suite définie par :

$U_0 = 3$ et $U_{n+1} = g(U_n)$ pour tout entier naturel n.

1) Démontrer que pour tout entier natuel n, $U_n \in [3; 4]$. (0,5 point)

2) En déduire que pour tout entier naturel n,

a) $|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{2}{3}|U_n - \alpha|$. (0,5 point)

b) $|U_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. (0,5 point)

3) Etudier la convergence de la suite (U_n). (0,5 point)

4) Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait : $|U_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$. (0,5 point)

Données numériques : $\ln 2 \simeq 0,7$; $\ln 3 \simeq 1,1$; $\ln 5 \simeq 1,6$; $\ln 10 \simeq 2,3$; $\ln\frac{2}{3} \simeq -0,4$; $e^{-1} = 0,3$; $e^{-2} \simeq 0,1$

Fin