UNIVERSITE OUAGA I
Pr Joseph KI-ZERBO
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2019
Session Normale
Epreuve du 2ème tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Cette épreuve comporte deux (2) pages

Exercice 1 (4 points)

Soit (Γ) la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \cos 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

On considère M(t) le point de coordonnées $(x(t); y(t))$.

1) Comparer :
   a) $M(t+2\pi)$ et $M(t)$. (0,25 point)
   b) $M(-t)$ et $M(t)$. (0,25 point)
   c) $M(\pi - t)$ et $M(t)$. (0,25 point)

2) En déduire les éléments de symétrie pour la courbe (Γ). (0,5 point)
Justifier qu'on peut réduire le domaine d'étude de (Γ) à l'intervalle $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. (0,25 point)

3) Etudier les variations de x et y et donner leurs variations dans un tableau commun pour t élément de I. (0,5 point+0,5 point)

4) a) Déterminer les équations des tangentes à la courbe (Γ) aux points de paramètres respectifs 0, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$. (0,25 point + 0,25 point + 0,25 point)
   b) Construire (Γ) et les tangentes aux points de paramètres respectifs 0, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.
   (Unité graphique : 4cm). (0,75 point)

Exercice 2 (4 points)

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on considère les points A, B et C tels que :

$A(-1; 2; -3)$, $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + \vec{k} - 2\vec{j}$, $C(0; -2; 0)$.

1) Déterminer les coordonnées du point B. (0,5 point)

2) Soit D un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
   a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$. En déduire la nature exacte du quadrilatère $ABCD$.
   (0,5 point+0,5 point)
   b) Calculer les coordonnées du point D. (0,5 point)

3) Calculer (en unité de longueur) la distance :
   a) d_1 du point O à la droite (AB). (0,5 point)
   b) d_2 du point O au plan (ABC). (0,5 point)

4) Calculer (en unité de volume) le volume $\mathcal{V}$ de la pyramide de base $ABCD$ et de sommet O.
(1 point)

Problème (12 points)

Partie A (4 points)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - (x^2 - 4x + 5)e^{-x+1}$

1) Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition. (0,25 point + 0,25 point)

2) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation. (1,5 point + 0,5 point

3) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\alpha \in]1,35; 1,36[$. (1 point + 0,25 point)

   b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. (0,25 point)

Partie B (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 3 + (x^2 - 2x + 3)e^{-x+1}$.
On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$; unité 2cm.

1) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. (0,25 point + 0,25 point)

2) a) Montrer que $f'(x) = g(x)$, pour tout réel x, avec f' la dérivée de f en x. Etudier le sens de variation de f. (0,5 point + 1 point)

   b) Dresser le tableau de variation de f. (0,25 point)

3) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 3$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$. (0,5 point)

   b) Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à (D). (0,5 point)

   c) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1. (0,5 point)

4) Tracer (D), (T) et (C). (0,25 point + 0,25 point + 0,75 point)

Partie C (3 points)

1) A l'aide d'une double intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$I = \int_1^{\alpha} (x^2 - 2x + 3)e^{-x-1}dx. \text{ (2 points)}$$

2) En déduire l'aire $A(\alpha)$ (en cm^2) du domaine plan délimité par les droites d'équations $x = 1, x = \alpha, y = 0$ et la courbe (C). (1 point)

On donne : $e^{-0,35} \simeq 0,7$ $\quad e^{-0,36} \simeq 0,69$ $\quad e \simeq 2,7$ $\quad e^{-1} \simeq 0,36$ $\quad f(\alpha) \simeq -0,2$

Fin