UNIVERSITE OUAGA I
Pr Joseph KI-ZERBO
Office du Baccalauréat
....
Séries C-E

Année 2019
Session Normale
Epreuve du 1er tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 6

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

Exercice 1 (4 points)

Un éleveur de chevaux possède dans son écurie quatre (04) étalons et six (06) juments. Il décide de vendre trois (03) de ces animaux pour faire face à ses dépenses.
On suppose que tous les animaux ont la même probabilité d'être vendus.

1) Soit Ω l'univers des éventualités.
   a) Calculer card Ω. (0,25 point)
   b) Calculer la probabilité des évènements suivants :
A : ≪ Parmi les trois chevaux, il y a au plus un étalon≫. (0,5 point)
B : ≪ Parmi les trois chevaux, il y a au moins une jument≫. (0,5 point)

2) Le prix de vente d'un étalon est 500 000 francs et celui d'une jument est 400 000 francs.
Calculer la probabilité de l'évènement
C : ≪ Obtenir un prix de vente total qui soit moins de 1 200 000 francs ≫. (0,5 point)

3) Cet éleveur doit payer la scolarité de ses trois enfants répartie comme suit :
   . 800 000 F pour le premier garçon qui est en année de master à l'université ;
   . 400 000 F pour la fille qui est à l'internat ;
   . 80 000 F pour le deuxième garçon qui est au lycée.
Quelle est la probabilité pour que cet éleveur puisse payer la scolarité totale de ses enfants en prélevant les trois chevaux au hasard. (0,75 point)

4) Soit X la variable aléatoire, qui, à chaque tirage de 3 chevaux, associe le prix de vente obtenu.
Déterminer la loi de probabilité de X. (1,5 point)
NB : On donnera les resultats sous forme de fractions irreductibles.

Exercice 2 (4 points)

1) Soit P un polynôme de degré n ($n \in \mathbb{N}^*$). P' est le polynôme dérivé de P.
   a) Déterminer le degré du polynôme $P' - 3P$. (0,5 point)
   b) Trouver un polynôme P tel que :
   $P'(x) = 3P(x) + 2 - x + 3x^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.(0,75 point)
   c) Résoudre l'équation différentielle $y' - 3y = 0$. (1) (0,5 point)
   d) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f est solution de (1) si et seulement si $P - f$ est solution de l'équation différentielle : $y' = 3y + Q$ (2) avec $Q(x) = 3x^2 - x + 2$. (0,75 point)
   e) En déduire les solutions de l'équation différentielle : $y' - 3y = 3x^2 - x + 2$. (0,5 point)

2) a) Résoudre l'équation différentielle : $y'' + \frac{1}{4}y = 0$ (3). (0,5 point)
   b) Trouver la solution f de (3) qui vérifie :
   $f(0) = 0$ et $f(\pi) = \sqrt{3}$. (0,5 point)

Problème (12 points)

Partie I (3,5 points)

Soit (U_n) la suite réelle définie par son premier terme U_0 non nul et différent de $-\frac{1}{2}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = 2U_n^2 + U_n$.

1) Montrer que la suite (U_n) est strictement croissante. (0,5 point)

2) Montrer que si (U_n) converge alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$. (0,5) point)

3) Montrer que si $U_0 + 2U_0^2 > 0$, alors on a :

a) $U_0 > 0$ ou $U_0 < -\frac{1}{2}$. (0,5 point)

b) la suite (U_n) diverge. (0,5 point)

4) a) Montrer que si $U_0 + 2U_0^2 < 0$ alors $-\frac{1}{2} < U_0 < 0$. (0,5 point)

b) Montrer par récurrence que si $U_0 + 2U_0^2 < 0$, alors pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $-\frac{1}{2} < U_n < 0$. (0,5 point)

c) En déduire que (U_n) est convergente si $U_0 + 2U_0^2 < 0$. (0,5 point)

Partie II (3 points)

Soit $\mathcal{P}$ le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On note f l'application de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = 2z^2 + z$.

1) a) Déterminer l'ensemble des points invariants par f. (0,5 point)

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par fof. (1 point)

2) Soient A,B et I les points de $\mathcal{P}$ d'affixes respectives $\frac{1}{2}i$; $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ et $-\frac{1}{4}$.

a) Déterminer $f(A)$ et $f(B)$. On donnera leurs coordonnées. (0,5 point)

b) Soit M_0 un point du plan.
Montrer que $f(M) = f(M_0)$ si et seulement si $M = M_0$ ou $M = S(M_0)$ ou S est une similitude du plan que l'on précisera. (1 point)

Partie III : (5,5 points)

1) Soient $(\mathcal{H})$ l'ensemble des points du plan dont les coordonnées x et y vérifient : $2x^2 - 2y^2 + x + \frac{1}{2} = 0$ et (P) l'ensemble des points du plan dont les coordonnées x et y vérifient $2y^2 + x = 0$.

a) Donner la nature de (P). Préciser son sommet, son foyer et sa directrice. (1 point)

b) Donner la nature de $(\mathcal{H})$. Préciser ses sommets et ses asymptotes. (1 point)

2) Soient $(\mathcal{H}_1)$ et (P_1) les ensembles de points du plan dont les coordonnées x et y vérifient :

$$(\mathcal{H}_1) : \begin{cases} -\frac{1}{2} < x < 0 \\ 2x^2 - 2y^2 + x + \frac{1}{2} > 0 \end{cases} \text{ et } (P_1) : \begin{cases} -\frac{1}{2} < x < 0 \\ 2y^2 + x < 0 \end{cases}$$

a) Montrer que (P_1) est inclus dans $(\mathcal{H}_1)$. (0,75 point)

b) Montrer que (P_1) est inclus dans (E), avec (E) l'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MK}\right\| < \frac{1}{2}$, K étant le point d'affixe $-\frac{1}{2}$. (0,75 point)

c) Montrer que si M appartient à $(\mathcal{H}_1)$ alors $f(M)$ est tel que son abscisse appartient à l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}; 0\right[$. (1 point)

Nous admettons que si M appartient à $(\mathcal{H}_1)$ alors $f(M)$ appartient à (P_1).

3) Soit M_0 un point de $(\mathcal{H}_1)$. On définit la suite de points (M_n) par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe de M_n et $a_n = |z_n|$.
En utilisant 2°) montrer que la suite (a_n) converge. (1 point)

Fin