UNIVERSITE Joseph KI-ZERBO

Office du Baccalauréat

Série D

Année 2020
Session Normale
Epreuve du 2$^{\text{ème}}$ tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Cette épreuve comporte deux (2) pages

Exercice 1 (4 points)

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 2x + 5$.

On suppose que l'équation (E) admet une solution particulière g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax + b$, où a et b sont des réels à déterminer.

1) Déterminer les réels a et b. (1 point)
2) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$. (0,5 point)
3) On note f la solution générale de (E).
   a) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E'). (1,5 point)
   b) Déduire l'expression de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. (0,5 point)
   c) Détermner la solution h de (E) qui s'annule en 0. (0,5 point)

Exercice 2 (4 points)

Soient les intégrales I et J définies par :

$$I = \int_0^{\pi} \cos^4 x dx \text{ et } J = \int_0^{\pi} \sin^4 x dx.$$

1) a) Montrer que pour tout x,
   $\cos^4 x = \cos x(\cos x - \cos x \sin^2 x)$ et
   $\sin^4 x = \sin x(\sin x - \sin x \cos^2 x)$. (1 point)
   b) Montrer que $I = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx - \frac{1}{3}J$ et $J = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx - \frac{1}{3}I$. (1,5 point) (On pourrait intégrer I et J par parties)
2) Montrer que :
   a) $I + J = \frac{3\pi}{4}$. (0,5 point)
   b) Calculer $I - J$. (0,5 point)
   c) Déduire les valeurs de I et J. (0,5 point)

Problème (12 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x+2)^2 e^{-x}, \text{ si } x \in [0; +\infty[\\ f(x) = x \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) + 4, \text{ si } x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis en déduire deux asymptotes à (C) dont on précisera les équations. (1,5 point)

2) a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0[$, $f(x) = x \ln|x-2| - x \ln|x| + 4$. (0,5 point)

b) Etudier la continuité de f en 0. (0,5 point)

c) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(1 - \frac{2}{x}\right)$ puis déduire $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right)$. (1 point)

d) Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, $\frac{f(x) - f(0)}{x} = (x+4)e^{-x} + 4\frac{e^{-x} - 1}{x}$. (0,5 point)

e) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement les résultats obtenus. (0,75 point)

3) Etudier le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$. (1 point)

4) a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]-\infty, 0[$. (1 point)

b) Déterminer le sens de variation de f' sur $]-\infty, 0[$ et dresser son tableau de variation sur $]-\infty, 0[$. (1 point)

c) En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]-\infty, 0[$. (0,5 point)

d) En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty, 0[$. (0,5 point)

5) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$. (0,25 point)

6) Construire la courbe (C). (1 point)

7) a) Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, $f(x) = (2x+4)e^{-x} - f'(x)$. (1 point)

b) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \int_0^3 (2x+4)e^{-x} dx$. (0,5 point)

c) Calculer en cm² l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$. (0,5 point)

On donne : $e^{-2} \simeq 0,14$

Fin