UNIVERSITE OUAGA I
Pr Joseph KI-ZERBO
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2018
Session Normale
Epreuve du 1er tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Cette épreuve comporte deux (2) pages.

Exercice 1 (4 points)

1) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $u = \dfrac{2+2i\sqrt{3}}{4}$ sous forme algébrique. (0,5 point)

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 + (\sqrt{3} - 7i)z - 4(3 + i\sqrt{3}) = 0$. (0,5 point)

3) Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (unité 2 cm).

a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2i$; $z_B = 4i$ et $z_C = -\sqrt{3} + 3i$. (0,5 point)

b) Montrer que $u = \dfrac{z_C - 2i}{z_B - 2i}$. (0,5 point)

c) En déduire la nature exacte du triangle ABC. (0,5 point)

4) Soit f l'application de $P \setminus \{C\}$ dans P, qui à tout point M d'affixe $z (z \neq z_C)$ associe le point M' d'affixe $z' = f(z)$ telle que : $z' = f(z) = \dfrac{z - 4i}{z + \sqrt{3} - 3i}$

a) Donner une interprétation géométrique du module et de l'argument de z'. (0,5 point)

b) En déduire et construire l'ensemble (E) des points M dont l'image par f a pour affixe un nombre imaginaire pur non nul. (0,5 point)

c) En déduire et construire l'ensemble (D) des points M dont l'image par f est un élément du cercle de centre O et de rayon 1. (0,5 point)

On donne $\sqrt{3} \simeq 1,7$.

Exercice 2 (4 points)

Un sac contient quatre pièces marquées 500 F et six pièces marquées 200 F indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois pièces de ce sac.

On désigne par A, l'évènement "tirer une pièce de 500 F et deux pièces de 200 F".

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 500 F figurant parmi les trois pièces tirées.

1) Calculer la probabilité de l'évènement A. (0,75 point)

2) a) Déterminer les valeurs prises par X. (0,75 point)

b) Déterminer la loi de probabilité de X. (1 point)

c) Calculer l'espérance mathématique de X. (0,75 point)

3) On repète cinq fois l'expérience en remettant à chaque fois les trois pièces tirées dans le sac. Quelle est la probabilité que l'évènement A se réalise exactement trois fois à l'issue des cinq tirages ? (0,75 point)

Problème (12 points)

Le plan P est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ unité graphique 2 cm.

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x+1} \text{ si } x \leqslant 0 \\ f(x) = x^2\ln(x) - x^2 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$ et (C) sa courbe représentative dans le plan P.

Partie A (8,5 points)

1) a) Etudier la continuité de f en 0. (0,25 point)
   b) Etudier la dérivabilité de f en 0, puis interpréter graphiquement le résultat. (1 point)

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter le résultat. (0,5 point)

3) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x + x + 1$.
   a) Calculer $g'(x)$ puis en déduire le sens de variation de g. (0,5 point)
   b) Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$. (0,5 point)
   c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule α et que $-1,28 < \alpha < -1,27$. (0,5 point)
   d) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. (0,25 point)

4) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (0,5 point)

5) a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty;0]$; $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ puis le sens de variation de f sur $]-\infty;0]$.(1,25 point)
   b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$. En déduire le signe de $f'(x)$ puis le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$. (1.25 point)
   c) Dresser le tableau de variations de f. (0,5 point)

6) Construire les demi-tangentes à l'origine puis la courbe (C). (1,5 point)

Partie B (2 points)

On considère la suite (J_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$ par : $J_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)dt$.

1) Donner une interprétation géométrique de J_n. (0,25 point)

2) a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $f(n) \leqslant J_n$. (0,5 point)
   b) Démontrer que la suite (J_n) est divergente. (0,25 point)

3) Calculer l'aire A en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. (1 point)

Partie C (1,5 points)

On considère un point mobile M dont les coordonnées sont données en fonction du paramètre t par $\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^{2t}(t-1) \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

1) Montrer que la trajectoire de M est une partie de (C) que l'on précisera. Tracer en pointillés la trajectoire de M. On la notera (Γ). (1 point)

2) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse à l'instant $t = \dfrac{\pi}{4}$. (0,5 point)

On donne : $e^{-1,28} \simeq 0,278$; $e^{-1,27} \simeq 0,2808$; $e \simeq 2,7$; $e^{1/2} \simeq 1,7$ $f(\alpha) = -0,28$

Fin