

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

Exercice I (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. $M(t)$ est un point mobile de coordonnées

$$x(t); y(t) \text{ définies par : } \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \cos(2t) - \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$$

(C) est la courbe décrite par la trajectoire de $M(t)$.

- 1) a) Montrer que les fonctions $x : t \mapsto x(t)$ et $y : t \mapsto y(t)$ sont périodiques de période T que l'on précisera. (0,5 point)
b) Que peut-on dire des positions des points $M(t)$ et $M(t+T)$? (0,5 point)
c) Calculer $x(-t)$ et $y(-t)$ et en déduire les positions des points $M(-t)$ et $M(t)$. (0,5 point)
d) Justifier que l'on peut réduire le domaine d'étude à $[0; \pi]$. (0,5 point)
- 2) Soit la courbe (C') définie par :
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \cos 2t - \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}; t \in [0, \pi].$$
 - a) Comment obtient-on (C) à partir de (C') ? (0,5 point)
 - b) Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$ et dresser le tableau de variation des fonctions x et y . (0,5 point)
 - c) Déterminer les coordonnées des points en lesquels la tangente est verticale. (0,5 point)
 - d) Déterminer les coordonnées des points en lesquels la tangente est horizontale. (0,5 point)
 - e) Tracer avec soin la courbe (C') . (0,5 point)
- 3) Tracer la courbe (C) . (0,5 point)

On donne : $\sqrt{3} = 1,7$

Exercice II (3 points)

Soit $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}[$

- 1) a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 + (2 \sin \theta)z + 1 = 0$ (e_0). (0,5 point)
b) Déterminer le module et un argument de chacune des racines de (e_0). (0,5 point)
- 2) On considère l'équation différentielle
 $y'' + 2 \sin \theta y' + y = x \cos \theta + 2 \sin \theta$ (e_1)
 - a) On pose $y_0(x) = ax + b$; avec a et b des nombres réels.
Déterminer les réels a et b tels que y_0 soit solution de (e_1). (0,5 point)
 - b) Montrer qu'une fonction y est solution de (e_1) si et seulement si $y - y_0$ est solution d'une équation différentielle homogène du second ordre que l'on résoudra. (1 point)
- 3) Déterminer toutes les solutions de (e_1). (0,5 point)

Problème (12 points)

Partie I : (7,5 points)

A tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur

$]-\frac{1}{2}; +\infty[$ par $f_n(x) = (x - \frac{1}{2})^n \ln(x + \frac{1}{2})$.

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) unité graphique 2 cm ; On notera f'_n la dérivée de f_n .

1) Soit g_n la fonction définie sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ par

$$g_n(x) = n \ln(x + \frac{1}{2}) + \frac{2x - 1}{2x + 1}.$$

a) Etudier les variations de la fonction g_n . (0,5 point)

b) Calculer $g_n(\frac{1}{2})$ et déterminer le signe de g_n sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$. (1 point)

2) a) Pour tout $x \in]-\frac{1}{2}; +\infty[$, montrer que :

(i) $f'_1(x) = g_1(x)$. (0,25 point)

(ii) $f'_n(x) = (x - \frac{1}{2})^{n-1} g_n(x)$. (0,25 point)

b) On suppose que n est impair. Etudier les variations de f_n et dresser son tableau de variation. (1 point)

c) On suppose que n est pair. Etudier les variations de f_n et dresser son tableau de variation. (1 point)

3) On note T la translation du plan de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{i}$. On note (E_n) l'image de (C_n) par la translation T .

Déterminer une équation cartésienne de (E_n) . (1 point)

4) a) Etudier les positions relatives de (C_1) et (C_2) . (0,5 point)

b) Tracer les courbes (C_1) et (C_2) sur une même figure. (2 points)

Partie II (4,5 points)

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_n = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (x - \frac{1}{2})^n \ln(x + \frac{1}{2}) dx.$$

1) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq v_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$. (1 point)

En déduire la limite de la suite (v_n)

2) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$v_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2^{-n}}{n+1} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{(2x-1)^{n+1}}{2x+1} dx, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \text{ (1 point)}$$

3) On pose pour $n \geq 1$ et $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$,

$$s_n(x) = 1 - (x - \frac{1}{2}) + (x - \frac{1}{2})^2 + \dots + (-1)^n (x - \frac{1}{2})^n.$$

a) Montrer que : $s_n(x) = \frac{2}{2x+1} + (-\frac{1}{2})^n \frac{(2x-1)^{n+1}}{2x+1}$. (1 point)

b) Déduire que : $v_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} \left[\ln 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right]$. (1,5 point)

On donne $\ln 2 \simeq 0,69$, $\ln 3 \simeq 1,1$, $\ln 5 \simeq 1,61$.

Fin