UNIVERSITE Joseph KI-ZERBO

Office du Baccalauréat

Série D

Année 2021
Session Normale
Epreuve du 1er tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Cette épreuve comporte deux (2) pages.

Exercice 1 (4 points)

1) Résoudre l'équation différentielle (E) : $2y' + y = 0$. (0,5 point)

2) On considère l'équation différentielle (E') : $2y' + y = (x+2)e^{\frac{-1}{2}x}$. Déterminer les réels a et b tels que la fonction f définie par $f(x) = (ax^2 + bx)e^{-\frac{1}{2}x}$ soit solution de (E'). (1,5 point)

3) Démontrer qu'une fonction g est solution de (E') si et seulement si $g - f$ est solution de (E). (1 point)

4) Déduire de ce qui précède la solution de l'équation (E'). (1 point)

Exercice 2 (4 points)

On définit pour tout entier naturel n, les suites (u_n) et (v_n) respectivement par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}(u_n)^2 \end{cases} \quad \text{et } v_n = \ln\left(\frac{2}{3}u_n\right)$$

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier n, $u_n > 0$. (0,75 point)

2) a) Calculer v_0. (0,5 point)
   b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 2. (0,5 point)

3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n. (1 point)

4) On pose : $S = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ et $S' = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$.
   a) Calculer S en fonction de n. (0,5 point)
   b) Prouver que : $S' = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} e^S$ puis exprimer S' en fonction de n. (0,75 point)

Problème (12 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+3)e^{-x} + x - 1$
On note (C) la courbe représentative de f.

Partie A

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^x - 2x - 1$

1) Etudier le sens de variation de h. (1,5 point)

2) a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions 0 et α. (1,5 point)
   b) Montrer que $\alpha \in]1, 2[$. (0,75 point)

3) Préciser le signe de $h(x)$ en fonction de x. (0,5 point)

Partie B

1) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. (1 point)

2) Calculer $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu. (1 point)

3) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x} h(x)$, h étant la fonction définie dans la partie A). (0,5 point)
(Indication : $1 = e^{-x} \times e^{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$)
b) En déduire le sens de variation de f. (0,5 point)

4) Dresser le tableau de variation de f. (0,5 point)

5) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C). (0,5 point)
b) Etudier la position relative de (C) par rapport à (Δ). (0,5 point)
c) Calculer les coordonnées du point A, intersection de (C) et (Δ). (0,5 point)

6) Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la droite (Δ) et la courbe (C). (1,25 point)

Partie C

Soit D la partie du plan limitée par l'axe des ordonnées, la droite (Δ), la courbe (C) et la droite d'équation $x = 2$.
A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire de D en cm^2. (1,5 point)

On donne : $e \simeq 2,72$; $\ln(2) \simeq 0,69$

Fin